УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М. УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ"

ДВОВИМІРНІ ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ НА ПРЯМОКУТНІЙ СІТЦІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА В-СПЛАЙНУ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

Побудовано двовимірні фінітні дискретно-неперервні та дискретні оператори перетворень Фур'є та Хартлі на основі методу Файлона (*Filon*) та В-сплайну третього степеня. Наведені теореми та тестовий приклад.

In this paper the operators of calculation of two-dimensional finite discretely-continual and discretely Fourier Transform and the Hartley Transform on the basis Filon's metod and of B-spline of the third degree are researched. The example and the theorems are given.

Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в побудові інструментарію інформаційних технологій [1, 2]–двовимірних фінітних операторів перетворень Фур'є та Хартлі (скорочено оператори $F\&H$) на прямокутній сітці на основі методу Файлона (*Filon*) [3] та двовимірного В-сплайну [4] третього степеня для дійсних або комплексних функцій двох дійсних змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції $f(x,y)$, які б мали більш якісні характеристики точності, ніж "класичні" двовимірні оператори $F\&H$. Тому проблема є актуальною.

В літературі, присвяченій перетворенням $F\&H$, основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) [5–7], порівняння швидких алгоритмів ДПФ та швидких алгоритмів дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) [8], створення багатовимірних варіантів ДПФ та ДПХ [9]. "Класичні" двовимірні перетворення $F\&H$ [9]:

$$Z^{F\backslash H}(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\left\{\begin{matrix}\exp\left[-j2\pi(ux+vy)\right]\\ cas\left[2\pi(ux+vy)\right]\end{matrix}\right\}dx\,dy,$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Z^{F\backslash H}(u,v)\left\{\begin{matrix}\exp\left[j2\pi(ux+vy)\right]\\ cas\left[2\pi(ux+vy)\right]\end{matrix}\right\}du\,dv,$$

(де $cas(t)=\cos(t)+\sin(t)$, $F\backslash H$ – скорочено Фур'є або Хартлі), в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді прямого та оберненого ДПФ та ДПХ [9]:

$$Z^{F\backslash H}[v_1,v_2]=(N_1N_2)^{-1}\sum_{\tau_1=0}^{N_1-1}\sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f[\tau_1,\tau_2]\left[\begin{matrix}\exp\left(-j2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\\ cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\end{matrix}\right], \quad (1)$$

$$v_1=\overline{0,\,N_1-1},\ v_2=\overline{0,\,N_2-1};$$

$$f[\tau_1,\tau_2]=\sum_{v_1=0}^{N_1-1}\sum_{v_2=0}^{N_2-1} Z^{F\backslash H}[v_1,v_2]\left[\begin{matrix}\exp\left(j2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\\ cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{2}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right)\end{matrix}\right], \quad (2)$$

$$\tau_1=\overline{0,\,N_1-1},\ \tau_2=\overline{0,\,N_2-1}.$$

Двовимірне "класичне" дискретне перетворення Фур'є (1), (2) з точки зору характеристик точності має недоліки, які розглянуто в [10].

Метою роботи є побудова двовимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних операторів $F\&H$ на основі методу Файлона та В-сплайну третього степеня по кожній змінній, з $\prod_{s=1}^{2}(2Mp_s+1)$ вузлами прямокутної сітки $S(x_{p_1},y_{p_2})$, $x_{p_1}=p_1\Delta_1$, $y_{p_2}=p_2\Delta_2$, $\Delta_s=\frac{2\pi}{2Mp_s+1}$, $p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s}$, $s=1,2$, в області $D=(-\pi,\pi)^2$, які мали б нову, порівняно з "класичними" дискретно-неперервними та дискретними двовимірними операторами $F\&H$, властивість–можливість забезпечувати більш високі характеристики точності (при однаковій кількості вузлів). Ціною за ці переваги є деяке збільшення обчислювальної трудомісткості.

Побудова двовимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних операторів $F\&H$ на основі методу Файлона та В-сплайну третього степеня по кожній змінній. Під фінітними операторами $F\&H$ ми розуміємо операторами $F\&H$ від фінітної функції. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що носій цих функції $\operatorname{supp} f(x,y)=C^r(D)$, $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$ та $\operatorname{supp} H(u,v)=C^r(D)$, $D=\left[-\pi,\pi\right]^2$. Хай $f(x,y)\in C^r(D)\bigcap L_p(D)$, $r=1,2,3..$; $p=1,2$ задовольняє вимогам двовимірної теореми дискретизації Найквіста [11]. (умова 1). Областю визначення дискретизованої функції $f(x_{p_1}, y_{p_2})$ є вузли прямокутної сітки $S(x_{p_1}, y_{p_2})$, $x_{p_1} = p_1 \Delta_1$, $y_{p_2} = p_2 \Delta_2$, $\Delta_s = \dfrac{2\pi}{2Mp_s + 1}$, $p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}$, $s = 1, 2$, в області $D = (-\pi, \pi)^2$. (умова 2). Для подальшого застосування умови 1 та 2 позначимо як умову "V".

Для наближеного обчислення коефіцієнтів двовимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$ комплексної функції дійсного аргумента $f(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) + j\,\mathrm{Im}\, f(x,y)$, $f(x,y) \in L_2(D)$, $D = [-\pi, \pi]^2$, для якої виконується умова "V":

$$a^{F\backslash H,\,2d}_{N,k_1,k_2}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \begin{Bmatrix} \exp\left[-j(k_1 x + k_2 y)\right] \\ cas(k_1 x + k_2 y) \end{Bmatrix} dx\, dy, \quad (3)$$

$$k_s = \overline{-N_s, N_s},\ s = 1, 2,\ N = \{N_1, N_2\},$$

в двовимірних сумах $F\&H$:

$$S_N^{F\backslash H}(u,v) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} a^{F\backslash H,\,2d}_{N,k_1,k_2}(f) \begin{Bmatrix} \exp\left[j(k_1 u + k_2 v)\right] \\ cas(k_1 u + k_2 v) \end{Bmatrix},$$

послідовно до кожної змінної $f(x,y)$ застосовуємо підхід Файлона, сформульований в [3] і модифікований в [12]. При цьому ми замінюємо в (3) $f(x,y)$ двовимірним B-сплайном третього степеня [4], де

$$h3(x,p,\Delta) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0,\ x \le x_{p-2}; \\ t^3,\ x_{p-2} < x \le x_{p-1},\ t = (x - x_{p-2})/\Delta; \\ 1 + 3t + 3t^2(1-t),\ x_{p-1} < x \le x_p,\ t = (x - x_{p-1})/\Delta; \\ 1 + 3(1-t) + 3t(1-t)^2,\ x_p < x \le x_{p+1},\ t = (x - x_p)/\Delta; \\ (1-t)^3,\ x_{p+1} < x \le x_{p+2},\ t = (x - x_{p+1})/\Delta; \\ 0,\ x > x_{p+2},\ p = -(M+1), -M, \ldots -1, 0, 1, \ldots, M, (M+1). \end{cases}$$

Внаслідок цього отримуємо наближення $a^{F\backslash H,\,2d}_{N,k_1,k_2}(f)$ функціоналом [13]:

$$a^{F\backslash H,\,2d}_{N,k_1,k_2}(f) \approx b2^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \int_{(p_1-2)\Delta_1}^{(p_1+2)\Delta_1} h3(x, p_1, \Delta_1) \times$$

$$\times \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}(f) \int_{(p_2-2)\Delta_2}^{(p_2+2)\Delta_2} h3(y, p_2, \Delta_2) \begin{Bmatrix} \exp\left[-j(k_1 x + k_2 y)\right] \\ cas(k_1 x + k_2 y) \end{Bmatrix} dy, \quad (4)$$

де

$$R_{p_1,p_2}(f) = C_1^{2d,Sp3} f(x_{p_1}, y_{p_2}) + C_2^{2d,Sp3}\left[f(x_{p_1}, y_{p_2-1}) + f(x_{p_1}, y_{p_2+1}) + \right.$$

$$\left. + f(x_{p_1-1}, y_{p_2}) + f(x_{p_1+1}, y_{p_2}) \right] + C_3^{2d,Sp3}\left[f(x_{p_1-1}, y_{p_2-1}) + f(x_{p_1-1}, y_{p_2+1}) + \right.$$

$$\left. + f(x_{p_1+1}, y_{p_2-1}) + f(x_{p_1+1}, y_{p_2+1}) \right],\ C_1^{2d,Sp3} = \frac{16}{9},\ C_2^{2d,Sp3} = -\frac{2}{9},\ C_3^{2d,Sp3} = \frac{1}{36}.$$

Обчисливши функціонал (4), отримуємо відповідно:

$$b2^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2}(f) = \left[B1^{F\backslash H,2d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2}(f), (k_1 \ne 0) \wedge (k_2 \ne 0) \right] \vee$$

$$\vee \left[B2^{F\backslash H,2d,Sp3}_{M,N,k_1,0}(f), (k_1 \ne 0) \wedge (k_2 = 0) \right] \vee \left[B3^{F\backslash H,2d,Sp3}_{M,N,0,k_2}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 \ne 0) \right] \vee$$

$$\vee \left[B4^{F\backslash H,2d,Sp3}_{M,N,0,0}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 = 0) \right]; \quad (5)$$

де

$$B1^{F\backslash H,2d,\,Sp3}_{M,N,k_1,k_2}(f) = Q_3(1) Q_3(2) \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}(f) \begin{bmatrix} \exp\left(-j \sum_{s=1}^{2} p_s k_s \Delta_s\right) \\ cas\left(\sum_{s=1}^{2} p_s k_s \Delta_s\right) \end{bmatrix},$$

$$B2^{F\backslash H,2d,Sp3}_{M,N,k_1,0}(f) = Q_3(1) e_2 \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j\, p_1 k_1 \Delta_1) \\ cas(p_1 k_1 \Delta_1) \end{bmatrix},$$

$$B3^{F\backslash H,2d,\,Sp3}_{M,N,0,k_2}(f) = e_1 Q_3(2) \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j\, p_2 k_2 \Delta_2) \\ cas(p_2 k_2 \Delta_2) \end{bmatrix},$$

$$B4^{F\backslash H,2d,\,Sp3}_{M,N,0,0}(f) = e_1 e_2 \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}(f),$$

$$Q_3(s)=\frac{\cos(2k_s\Delta_s)-4\cos(k_s\Delta_s)+3}{\pi(\Delta_s)^3(k_s)^4},\ N_s\le Mp_s,\ \Delta_s=2\pi e_s,\ e_s=\frac{1}{2Mp_s+1}$$

$$k_s=\overline{-N_s,N_s},\ s=1,2.$$

Значення функції $f(x_{p_1},y_{p_2})$ за межами прямокутної сітки $S(x_{p_1},y_{p_2})$, $x_{p_1}=p_1\Delta_1$, $y_{p_2}=p_2\Delta_2$, $\Delta_s=\dfrac{2\pi}{2Mp_s+1}$, $p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s}$, $s=1,2$, отримуємо, користуючись властивістю періодичністі частотних характеристик перетворень $F\&H$.

Оператори двовимірних фінітних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та B-сплайну третього степеня:

$$L_{M,N}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f;x,y)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}b_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)\begin{Bmatrix}\exp\left[j(k_1x+k_2y)\right]\\ cas(k_1x+k_2y)\end{Bmatrix},\tag{6}$$

$$N_s\le Mp_s,\ s=1,2,\ (x,y)\in D;$$

дозволяють обчислювати неперервне наближення функції $f(x,y)\in C^r(D)$; $r=1,2,3,...$ по її дискретних відліках $f(x_{p_1},y_{p_2})$, $(x_{p_1},y_{p_2})\in(-\pi,\pi)^2$. При застосуванні (6) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [9] для вибору необхідних Mp_1, Mp_2 для даної функції $f(x,y)$.

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та B-сплайну третього степеня отримуємо з (6), замінивши неперервні x,y на їх відповідні дискретні значення:

$$L_{M,N}^{F\backslash H,2d,Sp3}\left[f(x_{p_1},y_{p_2})\right]=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}b_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\exp\left(j\sum_{s=1}^{2}k_s\,p_s\,\Delta_s\right)\\ cas\left(\sum_{s=1}^{2}k_s\,p_s\,\Delta_s\right)\end{bmatrix},\ N_s\le Mp_s,\ p_s=\overline{-Mp_s,Mp_s},\ s=1,2.\tag{7}$$

При застосуванні (7) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації.

Теорема 1. Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, які задовольняють умову "V", мають властивості:

$$L_{M,N}^{F,2d,Sp3}(f)=L_{M,N}^{H,2d,Sp3}(f).\tag{8}$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 2. Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, які задовольняють умову "V":

$$U_{M,N}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}g_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)\begin{Bmatrix}\exp\left[j(k_1x+k_2y)\right]\\ cas(k_1x+k_2y)\end{Bmatrix},\tag{9}$$

$$N_s\le Mp_s,\ s=1,2,\ x,y\in\Re,\ N=Mp,$$

де $g_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)=\left[G_1{}_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2\ne0)\right]\vee$

$$\vee\left[G_2{}_{M,N,k_1,0}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f),(k_1\ne0)\wedge(k_2=0)\right]\vee\left[G_3{}_{M,N,0,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2\ne0)\right]\vee$$

$$\vee\left[G_4{}_{M,N,0,0}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f),(k_1=0)\wedge(k_2=0)\right],\ k_s=\overline{-N_s,N_s},\ s=1,2;\tag{10}$$

$$G_1{}_{M,N,k_1,k_2}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,\overline{Q_3(2)}\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp\left(-j\sum_{s=1}^{2}p_sk_s\Delta_s\right)\\ cas\left(\sum_{s=1}^{2}p_s\,k_s\,\Delta_s\right)\end{bmatrix}$$

$$G_2{}_{M,N,k_1,0}^{F\backslash H,2d,Sp3}(f)=\overline{Q_3(1)}\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_1k_1\Delta_1)\\ cas(p_1k_1\Delta_1)\end{bmatrix},$$

$$G_{3\,M,N,0,k_2}^{\;F\backslash H,2d,\,Sp3}(f)=e_1\overline{Q_3(2)}\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{p_1,p_2}(f)\begin{bmatrix}\exp(-j\,p_2\,k_2\,\Delta_2)\\ cas(\,p_2\,k_2\,\Delta_2)\end{bmatrix},$$

$$G_{4\,M,N,0,0}^{\;F\backslash H,2d,\,Sp3}(f)=e_1\,e_2\sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2}R_{\,p_1,p_2}(f),$$

$$\overline{Q_3(s)}=\frac{3}{(2\,Mp_s+1)\left[4-\cos(k_s\,,\Delta_s)\right]},\;N_s\le Mp_s\,,\;\Delta_s=2\pi\,e_s\,,\;e_s=\frac{1}{2Mp_s+1},$$

$$k_s=\overline{-N_s\,,N_s}\,,\;\;s=1,2\,,$$

отримані як результат обчислення функціоналу [13]:

$$g_{\;M,N,k_1,k_2}^{\;F\backslash H,\,2d,\;Sp3}(f)=\frac{b_{2\;M,N,k_1,k_2}^{\;F\backslash H,\,2d,\;Sp3}(f)}{b_{2\;M,N,k_1,k_2}^{\;F\backslash H,\,2d,\;Sp3}\begin{Bmatrix}\exp\left[\;j(k_1\,x+k_2\,y)\right]\\ cas(k_1\,x+k_2\,y)\end{Bmatrix}},$$

$$k_s=\overline{-N_s\,,N_s}\,,\;\;s=1,\;2;$$

де функціонал $b_{2\;M,N,k_1,k_2}^{\;F\backslash H,\,2d,\;Sp3}(\circ)$ визначається (4), мають властивості:

$$U_{\,M,\,N}^{\,F,3d,Sp3}(f)=U_{\,M,\,N}^{\,H,3d,Sp3}(f)\,. \tag{11}$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Теорема 3. Оператори $U_{\,M,\,N}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}(f)$ двовимірних дискретно-неперервних перетворень $F\&H$, побудовані на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та В-сплайну третього степеня, якщо $f(x,\,y)$, задовольняють умову "V", $f(x,\,y)\in T_N$, $N=\{N_s\}$, $s=1,\,2$, де T_N є множина тригонометричних поліномів степеня N, при $N=Mp$ мають властивості:

$$U_{\,Mp,\,Mp}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}(f)=f, \tag{12}$$

тобто є точні на тригонометричних поліномах заданого степеня в області

$D=(-\pi\,,\,\pi)^2$. Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона та В-сплайну третього степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, отримуємо з (9) замінивши неперервні $x,\;y$ на їх відповідні дискретні значення:

$$U_{\,Mp,\,Mp}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}\left[\,f(x_{p_1},y_{p_2})\right]=\sum_{k_1=-Mp_1}^{Mp_1}\sum_{k_2=-Mp_2}^{Mp_2}g_{\,Mp,\,Mp,\,k_1,\,k_2}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}(f)\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\exp\left(j\sum_{s=1}^{2}k_s\,p_s\,\Delta_s\right)\\ cas\left(\sum_{s=1}^{2}k_s\,p_s\,\Delta_s\right)\end{bmatrix},\;\;p_s=\overline{-Mp_s\,,\,Mp_s}\,,\;\;s=1,\,2\,. \tag{13}$$

При застосуванні (13) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації для вибору необхідних Mp_1, Mp_2 для даної функції $f(x,y)$.

Теорема 4. Оператори $U_{\,M,\,N}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}(f)$ двовимірних перетворень $F\&H$, побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та В-сплайну третього степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, якщо $f(x,\,y)$ задовольняють умову "V", мають властивості:

$$U_{\,M,\,N}^{\,F\backslash H,2d,Sp3}\left[\,f(x_{p_1},\,y_{p_2})\right]=f(x_{p_1},\,y_{p_2}),\;\;p_s=\overline{-Mp_s\,,Mp_s}\,,\;\;s=1,\,2\,. \tag{14}$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Для наступного застосування скористаємося теоремами 3, 4 [14, с. 185], з урахуванням яких маємо наступні теореми:

Теорема 5. Для двовимірних операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та В-сплайну третього степеня, для функцій $f(x,\,y)$, які задовольняють умову "V" в області $D=(-\pi\,,\,\pi)^2$, виконується наступне:

$$u_{\;Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{\;F,\,2d,\,Sp3}(f)=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u_{\;Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}^{\;H,\,2d,\,Sp3}(f)+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u_{\;Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}^{\;H,\,2d,\,Sp3}(f),$$

$$\Omega(n)=\{(-k_1,0)_0,\,(0,-k_2)_1,\,(-k_1,-k_2)_2,\,(-k_1,+k_2)_3\},\ n=\overline{0,3};$$

$$\Psi(n)=\{(+k_1,0)_0,\,(0,+k_2)_1,\,(+k_1,+k_2)_2,\,(+k_1,-k_2)_3\},\ n=\overline{0,3};$$

$$u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)=\left\{b^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f),\ g^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)\right\},$$

$$k_s=\overline{1,\,Mp_s},\ s=1,\,2. \tag{15}$$

Доведення отримуємо при застосуванні до $u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)$ теореми 3 [14, С.185].

Теорема 6. Для двовимірних операторів дискретно-неперервних та дискретних перетворень $F\&H$, побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня для функцій $f(x,\,y)$, які задовольняють умову "V", в області $D=(-\pi,\,\pi)^2$ виконується наступне:

$$u^{H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)u^{F,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Omega(n)\\ \Psi(n)\end{smallmatrix}\right]}(f)+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)u^{F,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\left[\begin{smallmatrix}\Psi(n)\\ \Omega(n)\end{smallmatrix}\right]}(f),$$

$$u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)=\left\{b^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f),\ g^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)\right\},$$

$$k_s=\overline{1,\,Mp_s},\ s=1,\,2,\ n=\overline{0,\,3}. \tag{16}$$

$\Omega(n)$ та $\Psi(n)$ визначаються в (15). Доведення отримуємо при застосуванні до $u^{F\backslash H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,Mp,\,(\circ),\,(\circ)}(f)$ теореми 4 [14, с. 185].

Тестовий приклад. В табл. 1 наведені результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції $f(x,\,y)$, де: $f(x,\,y)=\left[\cos(0{,}3x)\sin(1{,}7y)+j\cos(1{,}3x)\sin(2{,}7y)\right]\exp\left[-(|x|+|y|)\right]$ за допомогою розглянутих операторів.

Таблиця 1.

Mp_1, Mp_2	$\max\_E2$	$\max\_e2$	$\max\_E3$	$\max\_e3$
15 , 15	3,35 E–2	3,61 E–2	1,0 E–15	3,70 E-2
25 , 25	1,77 E–2	1,77 E–2	4,0 E–15	2,28 E-2
35 , 35	1,53 E–2	1,53 E–2	3,6 E–15	1,91 E-2

В табл. 1 використані наступні позначення:

$$\max\_e2=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|\mu(x_r,\,y_s)\right|/\Theta;\ \max\_E2=\max_{\substack{-Mp_1\le r\le Mp_1\\ -Mp_2\le s\le Mp_2}}\left|\mu(x_r)\right|/\Theta;$$

$$\Theta=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|f(x_r,\,y_s)\right|,\ \mu(x_r,y_s)=f(x_r,y_s)-L^{F\backslash H,2d,Sp3}_{Mp_1,Mp_2}f(x_r,y_s).$$

$$\max\_e3=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|\lambda(x_r,\,y_s)\right|/\Theta;\ \max\_E3=\max_{\substack{-Mp_1\le r\le Mp_1\\ -Mp_2\le s\le Mp_2}}\left|\lambda(x_r)\right|/\Theta;$$

$$\Theta=\max_{\substack{-R_1\le r\le R_1\\ -R_2\le s\le R_2}}\left|f(x_r,\,y_s)\right|,\ \lambda(x_r,y_s)=f(x_r,y_s)-U^{F\backslash H\,2d,\,Sp3}_{Mp_1,Mp_2}f(x_r,\,y_s).$$

$$Mp=\{Mp_s\},\ R=\{R_s\},\ R_s=k\,Mp_s,\ s=\overline{1,\,2},$$

де $k=5$ – кількість інтервалів інтерполяції.

Висновки.

1. Побудовано оператори двовимірних дискретно-неперервних та оператори двовимірних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня (5), (6), (7). Визначено їх властивості (8).

2. Побудовано оператори двовимірних дискретно-неперервних та оператори двовимірних дискретних перетворень $F\&H$ на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та B-сплайну третього степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня (9), (10), (13). Визначено їх властивості (11), (12), (14).

3. Наведено теореми, які визначають зв’язок між операторами $b^{F,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,N,\,k_1,\,k_2}(f)$ – $b^{H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,N,\,k_1,\,k_2}(f)$, та $g^{F,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,N,\,k_1,\,k_2}(f)$ – $g^{H,\,2d,\,Sp3}_{Mp,\,N,\,k_1,\,k_2}(f)$ – (15), (16).

4. Наведено тестовий приклад, який підтверджує отримані теоретичні твердження.

5. Отримані оператори доповнюють існуючий інструментарій інформаційних технологій в базисах $F\&H$. 6. Побудовані оператори $F\&H$ є подальшим розвитком методу Файлона [3] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у застосуванні розглянутих операторів $F\&H$ при вирішені деяких задач інформаційних технологій, наприклад, в системах автоматичного управління та регулювання, які застосовують сигнальні методи; у задачах математичного моделювання та комп'ютерної діагностики, у відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів, у вимірювальній техніці при побудові комп'ютерних вимірювальних засобів, при побудові різноманітних систем кріптографії тощо.

Список літератури: **1**. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі. //Вестник Национального технического университета "ХПІ", Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля", 38'2006.–С. 69-74. **2.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є. //Вестник Национального технического университета "ХПІ", Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение", 10'2007.–С. 119–127. **3.** *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals. //Proc. Roy.Soc. Edinburgh. 1928.–P. 38–47. **4**. *итвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. –Харків: "Основа", 2002.–541 с. **5**. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов.–М.: Мир, 1978.–848с. **6**. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения,–М.: Мир, 1990.–684 с. **7**. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. –М.: Мир, 1990.–175 с. **8.** *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ. –ТИИЭР, 1985, №12,–С.184–185. **9.** *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов.– М.: Мир, 1988. **10.** *Удовиченко В.Н.* Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье. /Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89, Рига, 1989, С. 204–206. **11.** *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов.–М.: Мир, 1982.–428 с. **12.** *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі В-сплайнів третього степеня. //Вестник Национального технического университета "ХПІ", Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование", 19'2003.–С. 95–100. **13.** *Балакришнан А.В*. Прикладной функциональный анализ. –М.: Наука, 1980.–383 с. **14.** *Удовиченко В.М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних В-сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня. //Вестник Национального технического университета "ХПІ", Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование", 19'2007.–С. 182–190.

Поступила в редакцію 03. 09. 2007